



Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

39. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Länderrunde)
Klasse 11 - 13
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

391331

Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 &= 3 \\x^9 + y^9 &= 9.\end{aligned}$$

391332

Wie viele Kreisscheiben vom Radius $\frac{1}{2}$ werden mindestens benötigt, um eine Kreisscheibe vom Radius 1 vollständig zu überdecken ?

Von den nachstehenden Aufgaben 391333A und 391333B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

391333A

Es seien α , β und γ nichtnegative Zahlen mit $\alpha + \beta + \gamma \leq 2\pi$. Beweisen Sie $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \geq \cos(\alpha + \beta) + \cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha)$.

In welchen Fällen gilt das Gleichheitszeichen ?

391333B

Susanne fragt Markus nach seinem Geburtstag. Markus, der Susannes Geburtstag kennt, antwortete: „Tages- und Monatszahl meines Geburtsdatums sind die Logarithmen von Tages- und Monatszahl deines Geburtstages bezüglich ein und derselben Logarithmenbasis. Diese Logarithmenbasis ist eine natürliche Zahl.“

Susanne kann daraus unter Kenntnis ihres Geburtsdatums eindeutig dasjenige von Markus errechnen. Susanne bemerkt anschließend: „Würdest du mein Geburtsdatum nicht kennen, so könntest du aus der Kenntnis deines Geburtsdatums und des von dir genannten Zusammenhangs mein Geburtsdatum eindeutig bestimmen. Dabei dürfen für die Logarithmenbasis sogar beliebige positive reelle Zahlen ungleich 1 zugelassen werden.“

Elfriede, die beide Geburtsdaten nicht kennt, hat zugehört und meint: „Aus eurer Unterhaltung schließe ich, dass es für die Kombination eurer Geburtsdaten nur

vier Möglichkeiten gibt.“ darauf bemerkt Susanne: „Mein Geburtsdatum ist unter diesen Umständen das spätestmögliche im Verlauf des Jahres.“
An welchen Tagen des Jahres haben Susanne und Markus Geburtstag ?