



**39. Mathematik-Olympiade**  
**1 Stufe (Schulrunde)**  
**Klasse 7**  
**Aufgaben**

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

390711

David hatte Pech beim Spiel mit Murmeln. Im ersten Spiel verlor er zwei mehr als ein Drittel seiner Murmeln. Im zweiten Spiel verlor er dann drei mehr als ein Viertel der ihm verbliebenen Murmeln. Nach diesem Spiel hatte David nur noch 21 Murmeln. Ermittle aus diesen Angaben, wie viele Murmeln David vor dem ersten Spiel besaß!

390712

(a) Ein König hat einen Gefangenen. Er bietet ihm eine Chance für die Freiheit. Der Gefangene erfährt nämlich wahrheitsgemäß: In jedem von zwei verschlossenen nebeneinander liegenden Räumen befindet sich entweder eine Dame oder ein Tiger. An den Türen dieser beiden Räume befinden sich Schilder.

Schild am linken Raum:

Schild am rechten Raum:

In diesem Raum ist eine Dame, im Nebenraum ist ein Tiger.

In einem der beiden Räume ist eine Dame, in einem der beiden Räume ist ein Tiger.

Dem Gefangenen wird die Freiheit versprochen, wenn er eine Tür öffnet und dabei keinen Tiger vorfindet. Er fragt: „Stimmt der Text auf den Schildern?“ Der König antwortet: „Auf einem Schild steht eine wahre, auf dem anderen eine falsche Aussage.“

Welche Tür muss der Gefangene öffnen, wenn er dem König zutraut, die Wahrheit gesagt zu haben?

(b) Nachdem die Aufgabe von dem Gefangenen ohne Probleme gelöst wurde, stellt der König einem zweiten Gefangenen diese Aufgabe mit neuer Verteilung von Tigern und Damen und mit neuen Schildern; diesmal antwortet er auf die Frage, ob der Text auf den Schildern stimmt: „Entweder ist der Text auf beiden Schildern wahr, oder er ist auf beiden Schildern falsch.“ Auf den Schildern steht:

Schild am linken Raum:

Schild am rechten Raum:

Mindestens in einem der beiden Räume ist eine Dame.

Im Nebenraum ist ein Tiger.

Welche Tür muss dieser Gefangene öffnen?

390713

Die Abbildungen A390713a und b zeigen ein Brett, auf dem 16 Nägel in einer quadratischen Anordnung angebracht sind. Der Abstand jedes Nagels zu seinen nächsten Nachbarn beträgt 1 cm. In den folgenden Aufgaben sind diese Nägel als Punkte anzusehen; der Durchmesser der Nägel ist zu vernachlässigen.

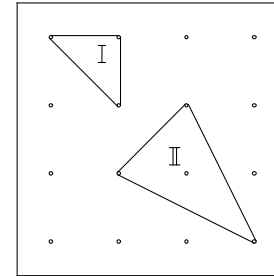


Abb.A390713a

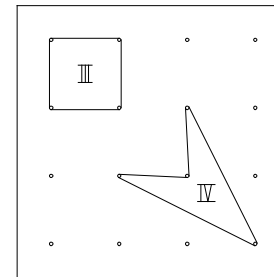


Abb.A390713b

- (a) Man kann um drei Nägel einen Faden so spannen, dass ein Dreieck entsteht. Wie viele Dreiecke, die kongruent zum Dreieck I sind, lassen sich so auf dem Nagelbrett bilden? Wie viele Dreiecke, die kongruent zum Dreieck II sind, lassen sich so auf dem Nagelbrett bilden?
- (b) Man kann einen Faden so um gewisse Nägel herum spannen, dass er dabei 4 Nägel berührt, die die Ecken eines Quadrates bilden. (Ein Beispiel ist das Quadrat III mit dem Flächeninhalt  $1 \text{ cm}^2$ .) Nenne alle Flächeninhalte von Quadraten, die sich auf dem Nagelbrett nach dieser Beschreibung bilden lassen!
- (c) Man kann einen Faden so spannen, dass das Viereck IV entsteht. Ermittle den Flächeninhalt dieses Vierecks!
- (d) Finde 5 Figuren, die die folgenden Bedingungen erfüllen!
- (1) Jede der Figuren entsteht, indem man einen Faden um gewisse Nägel herum spannt.
  - (2) Der Flächeninhalt jeder der Figuren beträgt  $2\frac{1}{2} \text{ cm}^2$ .
  - (3) Im Innern jeder der Figuren (also nicht von dem Faden berührt) befindet sich genau ein Nagel.
  - (4) Je zwei der 5 Figuren sind nicht zueinander kongruent.
- Eine Begründung, dass die Bedingungen (1) bis (4) erfüllt sind, wird nicht verlangt.

390714

Sarah hat zwei gleich große Eimer A und B, die beide zur Hälfte mit Wasser gefüllt sind.

Sie führt nun einen *Umfüllvorgang* durch, der aus zwei Teilschritten besteht.

Erster Teilschritt: Die Hälfte der im Eimer A befindlichen Wassermenge wird in den Eimer B geschüttet.

Zweiter Teilschritt: Die Hälfte der nun im Eimer B befindlichen Wassermenge wird in den Eimer A geschüttet.

- (a) Wie viel Wasser ist nach jedem Teilschritt in A, wie viel in B?  
Gib auch jeweils das Verhältnis dieser beiden Wassermengen an, ausgedrückt als Verhältnis zweier zueinander teilerfremder natürlicher Zahlen!
- (b) Sarah führt den Umfüllvorgang (jeweils bestehend aus den zwei Teilschritten) noch ein zweites und ein drittes Mal durch.  
Beantworte jedesmal dieselben Fragen wie in (a)!
- (c) Welche Gesetzmäßigkeiten kannst du dabei entdecken? (Ein Beweis ist hier nicht gefordert.)  
Verwende eine (oder mehrere) davon, um Antwort auf folgende Frage zu finden:  
Welches Verhältnis bilden die Wassermengen, nachdem der Umfüllvorgang insgesamt 8-mal durchgeführt wurde?
- (d) Schreibe, wenn du dazu in der Lage bist und Spaß daran hast, ein Computerprogramm, mit dem sich Antworten auf hier gestellte Fragen finden lassen!