Aufgabenausschuß des Mathematik-Olympiaden e.V.

38. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Länderrunde)
Klasse 11-13
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

381334

Geben Sie alle Mengen M natürlicher Zahlen an, die folgende Eigenschaften (1), (2), (3) besitzen:

(1) Das kleinste gemeinsame Vielfache der Elemente von M ist gleich 10010.

(2) das Produkt der Elemente von M ist durch $1001^6 \cdot 10^8$ teilbar.

(3) Die Anzahl der Elemente von M ist minimal, d.h., es gibt keine Menge M', die eine geringere Anzahl von Elementen als M hat und die Bedingungen (1) und (2) ebenfalls erfüllt.

381335

Die Punkte A, B, C und D liegen so auf einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M, daß sie die Eckpunkte eines Sehnenvierecks $ABCD$ des Kreises k sind und die Diagonalen AC und BD senkrecht zueinander sind.

Man beweise, daß die Seite CD doppelt so lang ist wie der Abstand des Punktes M von der Seite AB.

381336

Gegeben seien n Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ im Raum und eine positive Zahl a. Man bestimme die Menge aller Punkte P des Raumes, für die die Summe der Quadrate aller Abstände zwischen P und den Punkten P_k gleich a ist,

$$\overline{PP_1}^2 + \overline{PP_2}^2 + \ldots + \overline{PP_n}^2 = a\,. \qquad (1)$$