Aufgabenausschuß des Mathematik-Olympiaden e.V.

38. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Länderrunde)
Klasse 8
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

380834

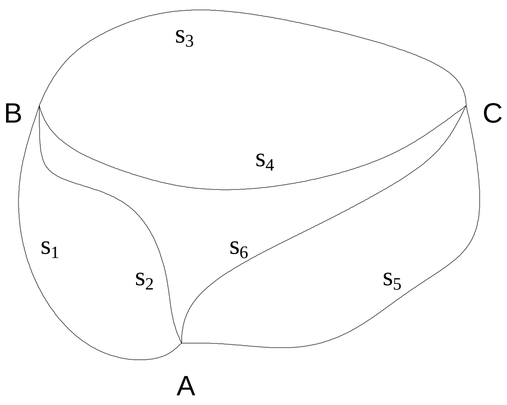

Abb. A380834

Von drei Ortschaften A, B und C ist jede mit jeder anderen durch zwei Wege verbunden, und zwar die Ortschaften A und B durch die Wege s_1 und s_2, die Ortschaften B und C durch die Wege s_3 und s_4 sowie die Ortschaften C und A durch die Wege s_5 und s_6. Wie aus der Abbildung A380834 ersichtlich, sollen diese Wege einander nicht kreuzen.
Herr Schumann will von A aus eine Wanderung unternehmen, die wieder in A endet und bei der er jeden der sechs Wege genau einmal durchläuft.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, eine solche Wanderung zu unternehmen ?
(Zwei Wanderwege werden als verschieden angesehen, wenn sie sich durch die Reihenfolge des Durchlaufens der sechs Wege unterscheiden.)

380835
In einem rechtwinkligen Dreieck *ABC* sei *B* der Scheitel des rechten Winkels und für die Kathetenlängen gelte $\overline{BC} < \overline{AB}$. Der Kreis k um B mit dem Radius der Länge $\overline{BC}$ schneide die Hypotenuse außer in *C* auch noch in *E*. Die in *E* an *k* gelegte Tangente schneide die Kathete *AB* in *D*.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen die Strecken *AD* und *DE* gleich lang sind !

380836

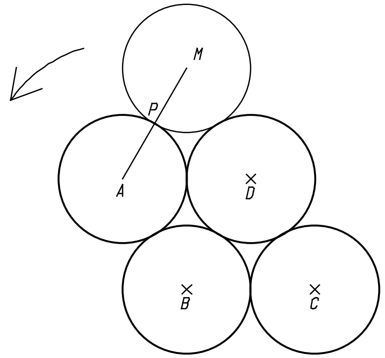

Abb. A380836

Die Abbildung A380836 zeigt vier einander gleich große Münzen *a*, *b*, *c*, *d* mit den Mittelpunkten *A*, *B*, *C*, *D*. Die Münzen *b* und *d* berühren einander und werden beide von *a* und *c* berührt. Eine fünfte, ebenso große Münze *m* mit dem Mittelpunkt *M* berührt *a* und *d*, ihr Berührungspunkt mit *a* sei *P*. Diese Münze *m* soll an der festgehaltenen, aus den Münzen *a*, *b*, *c*, *d* bestehenden Figur (in dieser Reihenfolge) abrollen, ohne dabei an ihnen zu gleiten.

Wir sagen, *m* habe „einen *Umlauf* um *a*, *b*, *c*, *d* " ausgeführt, wenn der Mittelpunkt *M* zum ersten Mal wieder dieselbe Lage wie zu Anfang hat.
Wir sagen, *m* habe „eine *Umdrehung*" ausgeführt, wenn der Pfeil $\overrightarrow{MP}$ zum ersten Mal wieder dieselbe Richtung wie zu Anfang hat.

Wie viele Umdrehungen führt *m* bei einem Umlauf um *a*, *b*, *c*, *d* aus?
Wenn die gesuchte Zahl der Umdrehungen keine ganze Zahl ist, dann gib sie in Form eines gekürzten Bruches an !