Aufgabenausschuß des Mathematik-Olympiaden e.V.

38. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klassen 11 -13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

381321

Man bestimme sämtliche Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die Lösungen des folgenden Gleichungssystems sind:

$$x-2=(x+2)(y-2), \qquad (1)$$

$$x^2=4\left(y^2-4y+x+3\right). \qquad (2)$$

381322

In einer Ebene sind ein Kreis k und zwei Punkte A und B außerhalb von k gegeben, die symmetrisch zum Mittelpunkt M von k liegen. Ein Punkt P liegt auf der Kreislinie k. Man beweise, daß die Summe der Quadrate der Abstände des Punktes P von den Punkten A und B nicht von der Wahl des Punktes P abhängt.

381323

Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ wird nach der folgenden Regel ein "Nachfolger" $f(n)$ gebildet:

Man trenne die letzte Dezimalstelle von n ab, multipliziere diese mit 5 und addiere das Ergebnis zu der verbleibenden (um die letzte Stelle verkürzte) Zahl.

(Für einstellige n sei die verbleibende Zahl Null. Beispielsweise ist $f(23)=17$ und $f(6)=30$).

Durch wiederholte Anwendung dieser Regel läßt sich für jedes n eine Folge natürlicher Zahlen bilden, indem $a_1=n$ gesetzt wird und dann schrittweise für $i = 1,2,3,...$ die Zahl a_{i+1} aus der Vorschrift

$$a_{i+1}=f(a_i)$$

bestimmt wird.

Zeigen Sie:

(a) Für jeden Startwert n ist die zugehörige Folge der Zahlen a_i beschränkt. (Das heißt, es existiert eine nur von n abhängige Zahl S, so daß $a_i \leq S$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$ gilt.)

(b) Die Folge enthält genau dann die Zahl 7, wenn n durch 7, aber nicht durch 49 teilbar ist.

381324

Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen a, b, c die Ungleichung

$$a^2\left(1+b^2\right)+b^2\left(1+c^2\right)+c^2\left(1+a^2\right)\geq 6abc \qquad (3)$$

erfüllt ist. Für welche Zahlentripel $(a; b; c)$ gilt in (3) das Gleichheitszeichen ?