



38. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klassen 7 und 8
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Bitte wähle zur Bearbeitung vier der sechs Aufgaben aus !

380811

Bereits im alten Rom (etwa 100 v.u.Z.) gab es "mathematische Wettbewerbe". So stellten sich die Gesetzhüter gegenseitig Aufgaben. Eine lautet :
Eine Witwe ist verpflichtet, die Hinterlassenschaft ihres Mannes in Höhe von 3500 Denar mit dem Kind, das sie erwartet, zu teilen. Wird es ein Sohn, so erhält er doppelt so viel wie seine Mutter. Wird eine Tochter geboren, so erhält sie halb soviel wie ihre Mutter. Nun wurde jedoch Zwillinge geboren - ein Sohn und eine Tochter.
Wie ist die Erbschaft in drei Teile (Mutter und zwei Kinder) aufzuteilen, so daß den beiden Vorschriften entsprochen wird ?

380812

Eine Touristengruppe mit genau 100 Teilnehmern machte eine Schiffsreise. 75 der Teilnehmer konnten englisch, 83 konnten französisch sprechen. 10 Teilnehmer sprachen weder englisch noch französisch.
Wie viele Touristen dieser Gruppe sprachen sowohl englisch als auch französisch?

380813

In einer Kiste befinden sich genau 100 Kugeln, und zwar 30 rote, 30 blaue 30 grüne sowie 10 Kugeln, von denen nur bekannt ist, daß sie schwarz oder weiß sind und mindestens eine schwarze Kugel dabei ist. Durch das Tastgefühl lassen sich verschiedenfarbige Kugeln nicht voneinander unterscheiden.
Untersuche, ob es trotzdem möglich ist, mit geschlossenen Augen jeweils eine möglichst kleine Anzahl von Kugeln, aber nicht alle, so herausgreifen, daß man mit Sicherheit vorausagen kann:
(a) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 12 Kugeln von gleicher Farbe.
(b) Unter den herausgegriffenen Kugeln befindet sich mindestens eine schwarze Kugel.
(c) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 5 weiße Kugeln.

380814

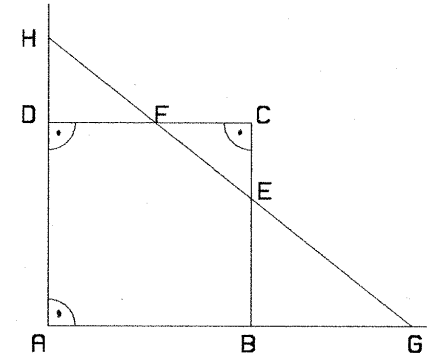
Ermittle alle Darstellungen der Zahl $\frac{8}{77}$ als Differenz zweier echter Brüche, deren Zähler ganze Zahlen sind und deren Nenner in irgend einer Reihenfolge 7 und 11 lauten !

380815

Abbildung A380813 zeigt eine Quadrat $ABCD$ und eine Gerade, die die Seiten BC und CD in E bzw. F und die Verlängerung der Seiten AB und AD in G bzw. H schneidet.

- (a) Zusätzlich werde vorausgesetzt: Es seien E und F die Mittelpunkte der Seiten BC bzw. CD ; die Länge einer Quadratseite betrage $a = 4$ cm. Ermittle unter diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Dreiecks AGH !
- (b) Anstelle der Voraussetzung in (a) werde man vorausgesetzt: Es seien F der Mittelpunkt der Quadratseite CD und E ein (innerer) Punkt der Seite BC , so daß $\overline{BE} : \overline{EC} = 2:1$ gilt.

Ermittle unter diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Dreiecks AGH in Abhängigkeit von der Länge a einer Quadratseite !



A 380815

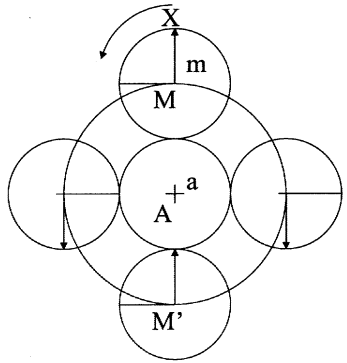


Abb. A 380816a

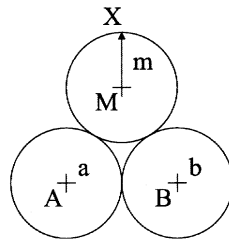


Abb. A 380816b

Die Abbildung A 380816a zeigt zwei gleich große Münzen a und m mit den Mittelpunkten A bzw. M die einander berühren, sowie einen Punkt X auf dem Rand m . Die Münze m soll an der festgehaltenen Münze a (im mathematischen positiven Drehsinn) abrollen, ohne dabei an ihr zu gleiten.

Wir sagen, die Münze m habe „einen Umlauf um a “ ausgeführt, wenn ihr Mittelpunkt M zum ersten Mal dieselbe Lage wie zu Anfang hat.

Wir sagen, die Münze m habe „eine Umdrehung“ ausgeführt, wenn der Pfeil \overrightarrow{MX} beim Abrollen sich zu ersten Mal um 360° gedreht hat, d.h. zum ersten Mal wieder seine Ausgangsrichtung erreicht hat.

Überzeuge dich von der Richtigkeit der folgenden Aussagen:

Die Münze m hat bei einem Umlauf a genau zwei Umdrehungen ausgeführt.

Die Punkt M legt bei einem Umlauf als Weg den Kreis um A mit dem doppelten Radius der Münzen zurück.

(Ein Beweis für diese Aussagen wird nicht verlangt.)

Die Abbildung A380816b zeigt drei gleich große Münzen a , b und m mit den Mittelpunkten A , B und M . Jede dieser Münzen berührt die beiden anderen. Entsprechend wie oben wird geklärt, wann m einen „Umlauf um a und b “ bzw. eine „Umdrehung“ ausgeführt hat.

- Wie viele Umdrehungen führt m bei einem Umlauf um a und b aus? Wenn die gesuchte Zahl der Umdrehungen keine ganze Zahl ist, dann gib sie in Form eines gekürzten Bruches an!
- Welche Lage X' erhält der Punkt X , wenn er mit der Münze m mitbewegt wird, nach einem Umlauf von m um a und b ? Beschreibe diese Lage, indem du die Größe des Winkels angibst, den der Pfeil $\overrightarrow{MX'}$ mit dem ursprünglichen Pfeil \overrightarrow{MX} bildet!
- Nach wie vielen Umdrehungen von m erreicht der mit bewegte Punkt X zum ersten Mal wieder dieselbe Lage wie zu Anfang?
- Welchen Weg beschreibt der Punkt M bei einem Umlauf von m um a und b ?