



Aufgabenausschuß des Mathematik-Olympiaden e.V.

37. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

370921 Beweisen Sie die folgende Aussage (a)!

- (a) Wenn eine Quadratzahl ungerade ist, dann läßt sie bei Division durch 8 den Rest 1.

Zusatzaufgabe (je nach Mitteilung des Organisators zur Bewertung herangezogen):

Beweisen Sie auch die folgende Aussage (b)!

- (b) Wenn eine Quadratzahl ungerade, aber nicht durch 3 teilbar ist, dann läßt sie bei Division durch 24 den Rest 1.

370922

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (n, k) ganzer Zahlen $n \geq 0, k \geq 0$, für die $3^{4n} + 4 \cdot 7^{4k}$ eine Primzahl ist!

370923 Zur Gestaltung einer Schulfest will die Klasse 9a ein Glücksspiel veranstalten. Statt des langweiligen Kaufens eines Loses sollen die Teilnehmer (nach Entrichten einer Gebühr) aus einem Skatenspiel (4 „Farben“ zu je 8 „Bildern“ 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, As) fünf Karten ziehen. Jeder kann vor dem Ziehen entscheiden, was als „gewonnen“ gilt: Entweder: Alle fünf gezogenen Karten sind von einheitlicher „Farbe“. Oder: Unter den fünf gezogenen Karten sind vier einheitliche „Bilder“. Hat man bei einer dieser beiden Wahlmöglichkeiten die größeren Gewinnchancen, und wenn ja, bei welcher?

370924 Zu einem gegebenen spitzwinkligen Dreieck ABC sei k der Umkreis. Die drei in A, B, C an den Kreis k gelegten Tangenten bilden ein neues Dreieck DEF . Die Größen der Innenwinkel im Dreieck ABC seien wie üblich α, β, γ genannt; die Größen der Innenwinkel im Dreieck DEF seien $\delta, \varepsilon, \varphi$.

- (a) Konstruieren Sie zu einem beliebig gewählten, spitzwinkligen und nicht gleichschenkligen Dreieck ABC den Umkreis k und das oben genannte Dreieck DEF ! Beschreiben Sie diese Konstruktion!
- (b) Berechnen Sie die Winkelgrößen $\delta, \varepsilon, \varphi$ in Abhängigkeit von α, β, γ !