Aufgabenausschuß des Mathematik-Olympiaden e.V.

37. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

370821

Frau Meier hat für ihre zwei Katzen Frieda und Minna Futter gekauft, das genau 30 Tage reicht. Sie hat dabei auch beachtet, daß

$$\text{Frieda } \frac{1}{5} \text{ mehr als Minna} \tag{1}$$

frißt. Bevor Frau Meier das gekaufte Futter zu verfüttern beginnt, nimmt sie noch Nachbars Katze Paula in Pension. Das gekaufte Futter wird nun für alle drei Katzen genau 21 Tage reichen.

(a) Berechne eine zu (1) entsprechende Angabe darüber, wieviel Futter Paula im Vergleich zu Minna frißt, d.h., ob sie mehr oder weniger als Minna frißt und um welchen Bruchteil mehr bzw. weniger.

(b) Wie lange würde das gekaufte Futter für Paula allein reichen?

370822

(a) Lehrer Müller braucht für seinen Chemieunterricht 1000 Gramm 5%–ige Schwefelsäure. Er findet im Chemikalienschrank eine Flasche mit 120 Gramm 33%–iger Schwefelsäure. Zeige, daß er hiermit durch Hinzufügen von Wasser die gewünschte Menge der benötigten Säure nicht herstellen kann!

(b) Nach einigem Suchen findet er noch eine zweite Flasche mit 1000 Gramm 1% -iger Schwefelsäure. Kann er jetzt die benötigte Säure in mindestens der gewünschten Menge herstellen? Welche größtmögliche Menge genau kann er erreichen?

<Bemerkung, falls diese Aufgabe zum Nachmachen verlockt: Da das Zusammengießen von Schwefelsäure und Wasser gefährlich ist, bleiben derartige Experimente dem Lehrer vorbehalten!>

370823

(a) Gegeben sei ein beliebiges Sechseck. Gesucht sind Dreiecke, die folgende Bedingungen erfüllen: Jede Ecke des Dreiecks ist auch eine Ecke des Sechsecks; mindestens eine Seite des Dreiecks ist auch eine Seite des Sechsecks. Wie viele solche Dreiecke gibt es insgesamt?

(b) Es sei n eine natürliche Zahl mit $n > 3$. Gegeben sei ein beliebiges n-Eck. Gesucht sind Dreiecke, die folgende Bedingungen erfüllen: Jede Ecke des Dreiecks ist auch eine Ecke des n-Ecks; mindestens eine Seite des Dreiecks ist auch eine Seite des n-Ecks. Wie viele solche Dreiecke gibt es insgesamt?

Löse diese Aufgabe zunächst *für einen weiteren Wert* n, beispielsweise für $n = 50$! Ermittle dann auch eine *Formel zur Berechnung der Anzahl der genannten Dreiecke* in Abhängigkeit von n!

370824

In einem Parallelogramm $ABCD$ mit $\overline{AB} > \overline{BC}$ seien die Winkelhalbierenden der Innenwinkel bei A, B, C und D konstruiert. Dabei auftretende Schnittpunkte von Winkelhalbierenden seien so mit S_1, S_2, S_3 und S_4 bezeichnet, wie aus Abb. A370824 ersichtlich.

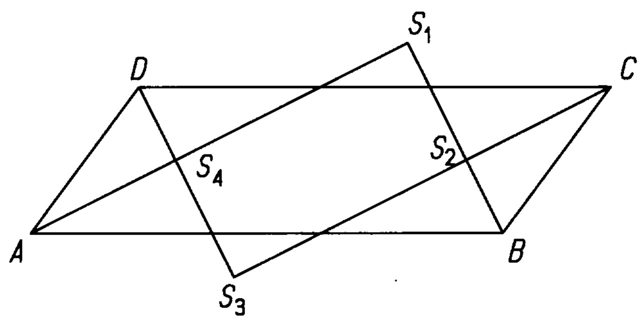

Abb.A370824

(a) Beweise, daß das Viereck $S_1S_2S_3S_4$ unter diesen Voraussetzungen stets ein Rechteck ist!

(b) Zusätzlich werde nun vorausgesetzt, daß der Punkt S_1 auf der Strecke CD liegt.
Beweise, daß durch die hiermit vorliegenden Voraussetzungen das Verhältnis $\overline{AB} : \overline{BC}$ eindeutig bestimmt ist! Ermittle dieses Verhältnis!

(c) Die in (b) genannte zusätzliche Voraussetzung werde nun nicht mehr gestellt. Stattdessen sei – zusätzlich zu (a) – vorausgesetzt, daß das Parallelogramm $ABCD$ ein Rechteck ist. Beweise, daß unter den jetzt gestellten Voraussetzungen das Viereck S_1, S_2, S_3, S_4 stets ein Quadrat ist!