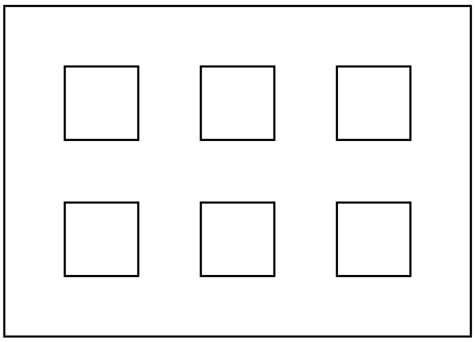
36. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360941

Ein Fotoklub möchte eine Serie von Blättern zum Verteilen herstellen. Auf jedem Blatt sollen 6 Bilder sein, wie in Abbildung A 360941 gezeigt.



A 360941

Für solche Bilder stehen insgesamt 10 verschiedene Motive zur Verfügung. Jede mögliche Zusammenstellung von 6 verschiedenen dieser Motive soll in einer beliebigen Reihenfolge auf genau einem Blatt vorkommen. Wie viele Exemplare (kleinstmögliche Anzahl) von jedem der 10 Motive reichen aus?

Hinweis: Anders als im Vorspann vermerkt, würde es *bei dieser Aufgabe nicht ausreichen*, etwa eine (für Aufgaben dieses Typs) anwendbare *fertige Formel* als bekannten Sachverhalt anzuführen und dann *nur formal anzuwenden.* Vielmehr ist, wenn eine solche Formel benutzt werden soll, zusätzlich zu ihr eine Begründung zu nennen (die wenigstens für die hier gestellte spezielle Aufgabe ausreicht).

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

360942

Es seien 100 Brüche $Q_i = \dfrac{a_i}{b_i}$ $(i = 1, \ldots, 100)$ mit natürlichen Zahlen a_i und b_i beliebig gewählt, nur mit der Bedingung, daß mindestens ein Paar (i, j) mit $Q_i \neq Q_j$ existiert.

Beweisen Sie, daß der Bruch $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}}{b_1 + b_2 + \cdots + b_{100}}$ größer als das Minimum der Q_i und kleiner als das Maximum der Q_i ist!

360943

Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $\overline{AB} || \overline{CD}$ und $|AB| = 2 \cdot |CD|$. Der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sei S. Jede Gerade g durch S zerlegt das Trapez in zwei Teilflächen; deren Flächeninhalte seien so mit F_1, F_2 bezeichnet, daß $F_1 > F_2$ gilt.

(a) Beweisen Sie, daß es genau eine Gerade g durch S gibt, für die das Verhältnis $v = F_1 : F_2$ seinen größtmöglichen Wert annimmt!

(b) Berechnen Sie diesen größtmöglichen Wert von v!