36. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklassen 8
Aufgaben – 2. Tag

© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360844

Karl und Fritz spielen ein Würfelspiel: Sie werfen drei Würfel auf einmal. Zeigen alle drei Würfel dieselbe Zahl, so gewinnt Karl; zeigen die Würfel drei aufeinanderfolgende Zahlen, so gewinnt Fritz. Sind aber die drei Zahlen weder einander gleich noch drei aufeinanderfolgende Zahlen, so ist dieser Wurf unentschieden. Nach einiger Zeit stellt sich heraus:

(a) Karl findet das Spiel „unfair“. Er meint, Fritz habe größere Gewinnchancen als er selbst. Stimmt das?

(b) Fritz findet das Spiel „langweilig“. Er meint, die Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden sei genau fünfmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit für einen Wurf, der nicht unentschieden ist. Hat er recht?

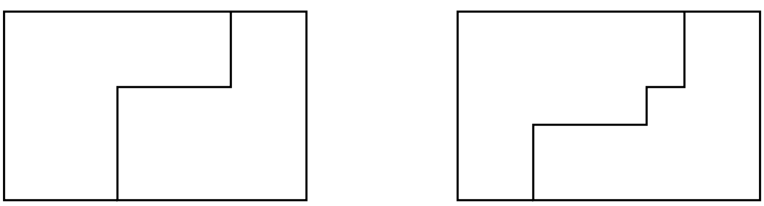
360845

Beweise, daß die Zahl $21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar ist!

360846

In Abbildung A 360846 ist ersichtlich, was unter einer „zweistufigen“ und einer „dreistufigen Treppenlinie“ in einem Rechteck verstanden werden soll:

Ihre Teilstrecken gehen durch das Innere des Rechtecks; sie sind parallel zu den Seiten des Rechtecks, und zwar abwechselnd von unten nach oben und von links nach rechts.



A 360846

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Nun werde folgende Aufgabe betrachtet:

Ein Rechteck soll so durch eine derartige Treppenlinie zerschnitten werden, daß sich die rechte Teilfläche durch eine Verschiebung in eine Lage bringen läßt, bei der Folgendes gilt:

Die beiden Teilflächen sind wieder lückenlos und ohne Überlappung zusammengefügt, und zwar diesmal zu einem Quadrat.

(a) Zeichne ein Rechteck mit der Breite $a = 9\,\text{cm}$ und der Höhe $b = 4\,\text{cm}$, in dem die Aufgabe durch das Beispiel einer zweistufigen Treppenlinie gelöst ist!

(b) Gib ein Paar (a, b) von Seitenlängen (Breite und Höhe eines Rechtecks) so an, daß die Aufgabe mit einer dreistufigen Treppenlinie lösbar läßt! Beweise auch: Wenn die Aufgabe mit einer dreistufigen Treppenlinie lösbar ist, dann müssen a und b in demselben Verhältnis zueinander stehen wie bei den von dir angegebenen a und b!

(c) Zeige, daß es zu jeder natürlichen Zahl n genau ein Verhältnis $a : b$ gibt, für das die Aufgabe mit einer n-stufigen Treppe lösbar ist!