36. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklasse 10
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

361031

Beim Kartenspiel „Doppelkopf" gibt es 40 Karten, nämlich von jeder der vier „Farben" *Kreuz, Pik, Herz, Karo* je zwei von jedem der „Bilder" *As, König, Dame, Bube, Zehn.*

Jemand stellt fest, daß die ersten vier Karten, die er beim Geben bekommen hat, vier Damen sind. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es insgesamt für eine Zusammenstellung von vier Damen?

Dabei gelten zwei Möglichkeiten genau dann als voneinander verschieden, wenn für (mindestens) eine der vier Farben gilt, daß bei der einen Zusammenstellung eine andere Anzahl von Damen dieser Farbe dabei ist als bei der anderen Zusammenstellung. Auf eine Unterscheidung zwischen zwei Damen jeweils von einander gleicher Farbe kommt es also nicht an, auch nicht auf die Reihenfolge, in der die vier Karten zusammengestellt werden.

361032

Ermitteln Sie alle diejenigen ganzen Zahlen a, b und n, für die $n \geqslant 1$ und

$$(a+b)^n = a^n + b^n$$

gilt!

361033

Gegeben seien zwei Kreise k_1, k_2 , die sich in zwei Punkten $P \neq Q$ schneiden und für deren Radien $r_1 \neq r_2$ gilt.

Von einer Geraden g wird gefordert:

(1) Die Gerade g schneidet k_1 in P und einem Punkt A_1, sie schneidet k_2 in P und einem Punkt A_2.
(2) Es gilt $P \neq A_1$, $P \neq A_2$ und $A_1 \neq A_2$.
(3) Es gilt $|PA_1| = |PA_2|$.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

(a) Aus der Annahme, eine Gerade g erfülle diese Forderungen, soll hergeleitet werden, wie man g (ausgehend von den gegebenen Kreisen k_1, k_2 und ihren Mittelpunkten M_1, M_2) konstruieren kann. Führen Sie eine solche Herleitung durch und

(b) beschreiben Sie die so hergeleitete Konstruktion!

(c) Zeigen Sie, wie sich auch umgekehrt aus der Voraussetzung, eine Gerade g sei nach Ihrer Beschreibung konstruiert, schließen läßt, daß g dann die Forderungen erfüllt!

(d) Führen Sie, ausgehend von zwei selbst gewählten Kreisen k_1, k_2, die von Ihnen beschriebene Konstruktion aus!