

36. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben



© 1996 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

360821

Über die Wahl zum Schulsprecher des Friedrich-Schiller-Gymnasiums ist folgendes bekannt:

- (1) Nur Kerstin und Martin waren als Kandidaten nominiert.
- (2) Es wurden von genau 90% aller Schüler der Schule Stimmen abgegeben.
- (3) Genau 128 der abgegebenen Stimmen waren ungültig.
- (4) Für Kerstin waren genau 248 abgegebene Stimmen mehr als für Martin.
- (5) Die für Kerstin abgegebenen Stimmen waren genau 49% aller Schüler der Schule.

Untersuche, ob durch diese Angaben die Anzahl der für Kerstin abgegebenen Stimmen eindeutig bestimmt ist! Ist das der Fall, so gib diese Anzahl an!

360822

Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AB| = |BC|$. Die Größe des Winkels ABC betrage 120° . Der Fußpunkt des Lotes von C auf die Gerade durch A und B sei D .

- (a) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen die Strecke \overline{CB} eine Winkelhalbierende im Dreieck ADC ist!
- (b) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen der Flächeninhalt des Dreiecks ABC doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks DBC ist!

360823

Brüche der Form $\frac{1}{n}$, wobei n eine natürliche Zahl bezeichnet, die größer als 1 ist, werden Stammbrüche genannt. Zwei Stammbrüche, deren Nenner sich um 1 unterscheiden, wollen wir benachbart nennen. Drei Stammbrüche, von denen der erste (mit dem kleinsten Nenner) und der zweite sowie der zweite und der dritte jeweils benachbart sind, seien ebenfalls benachbart genannt. Zum Beispiel sind $\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$ drei benachbarte Stammbrüche.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

- (a) Ermittle alle diejenigen (gebrochenen) Zahlen zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, die sich als Summe dreier benachbarter Stammbrüche schreiben lassen!
- (b) Max erklärt dem Moritz, wie er die Summe zweier benachbarter Stammbrüche berechnet: „Ich erweitere den ersten Stammbruch mit dem Nenner des zweiten und den zweiten Stammbruch mit dem Nenner des ersten. Die Zähler der beiden so entstandenen Brüche addiere ich; das ergibt den Zähler des Ergebnisses. Als Nenner des Ergebnisses nehme ich den gemeinsamen Nenner der beiden eben durch Erweitern erhaltenen Brüche.“
Moritz antwortet: „Wenn man so rechnet, ergibt sich stets ein unkürzbarer Bruch, gleichgültig, welche beiden benachbarten Stammbrüche man addiert hat.“
Beweise, daß diese Antwort wahr ist!
- (c) Zur Berechnung der Summe dreier benachbarter Stammbrüche sei der folgende Weg vorgeschrieben: „Man erweitere jeden der drei Stammbrüche mit dem Produkt der Nenner der beiden anderen Stammbrüche. Man addiere die Zähler der drei so entstandenen Brüche; das ergibt den Zähler des Ergebnisses. Als Nenner des Ergebnisses nehme man den gemeinsamen Nenner der drei eben durch Erweitern erhaltenen Brüche.“
Für welche Nenner des ersten Stammbruchs kann der so als Summe erhaltene Bruch durch 2 gekürzt werden, für welche nicht?
Zeige, daß der erhaltene Bruch in jedem Fall durch keine andere Zahl (> 1) als durch 2 gekürzt werden kann!

360824

- (a) In einer Kleinstadt gibt es fünf Apotheken. Wir bezeichnen sie mit A, B, C, D und E . Ein Lieferant soll auf einer Fahrt alle fünf Apotheken erreichen, jede genau einmal, und ihnen Arzneimittel anliefern. Er hat ferner den Auftrag, auf dieser Fahrt zusätzlich einige Arzneimittel bei Apotheke B zu laden und zur Apotheke D zu bringen. Ebenso soll er weitere Arzneimittel bei Apotheke C laden und zur Apotheke E bringen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, für die Fahrt die Reihenfolge der Apotheken so zu wählen, daß alle diese Bedingungen erfüllt sind?
Hinweis: Es genügt nicht, die Möglichkeiten einfach aufzuzählen. Es muß auch deutlich gemacht werden, daß es keine weiteren Möglichkeiten gibt.
- (b) In einer anderen Stadt sollen auf einer Fahrt sieben Apotheken A, B, C, D, E, F, G erreicht werden, jede genau einmal, und ein zusätzlicher Auftrag lautet:
Es sind bei Apotheke B Arzneimittel zu laden; einige davon sind zur Apotheke E zu bringen, einige zur Apotheke G .
Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge gibt es diesmal?