36. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

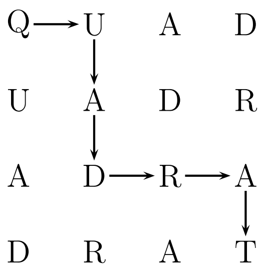
360721

In dem Schema der Abbildung A 360721 läßt sich das Wort **Q U A D R A T** auf verschiedenen „Wegen" von **Q** nach **T** lesen. Man geht z. B. (wie eingezeichnet) von **Q** aus einen Schritt nach rechts, dann zwei Schritte nach unten, dann zwei nach rechts und schließlich noch einen Schritt nach unten zum Buchstaben **T**.

Es gilt die Bedingung: Von einem Buchstaben darf man jedesmal nur entweder zum nächsten Buchstaben nach rechts oder zum nächsten Buchstaben nach unten gehen.

Wie viele solche Wege von **Q** nach **T** gibt es insgesamt in diesem Schema?

Begründe deine Antwort!



A 360721

360722

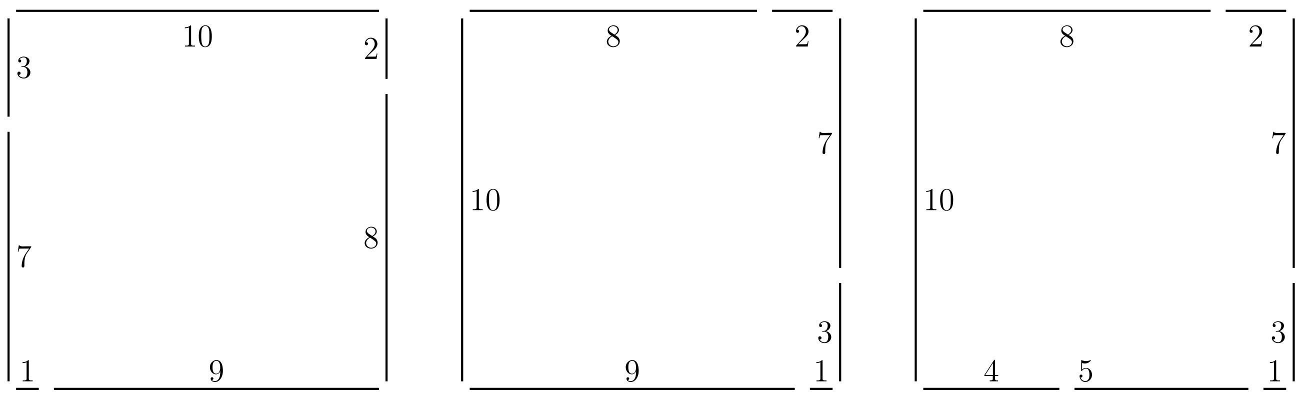
Stefanie besitzt genau 9 Holzstäbchen; eines ist 1 cm lang, ein zweites 2 cm, ein drittes 3 cm,. . . , das neunte 9 cm. Stefanie möchte ein Quadrat legen; d. h., die vier Seiten des Quadrates sollen aus Stäbchen bestehen, wobei keine anderen als nur die oben genannten vorkommen sollen. Allerdings müssen nicht alle 9 Stäbchen verwendet werden.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es insgesamt für ein so herzustellendes Quadrat?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Hinweis: Zwei Möglichkeiten solcher Quadrate gelten genau dann als voneinander „verschieden", wenn in einem dieser beiden Quadrate mindestens eine Seite vorkommt, die – verglichen mit jeder Seite des anderen Quadrates – aus anderen Stäbchen besteht.

Es spielt hierfür also keine Rolle, in welcher Reihenfolge die vier Seiten eines Quadrates angeordnet sind und in welcher Reihenfolge die Stäbchen einer Quadratseite. Beispielsweise würde (wenn auch ein Stäbchen der Länge 10 cm vorkommen dürfte) Abb. A 360722 nicht etwa drei, sondern genau zwei verschiedene Möglichkeiten zeigen; denn die beiden linken Quadrate zeigen nur eine Möglichkeit, nicht etwa zwei voneinander „verschiedene".



A 360722

360723

Brüche der Form $\frac{1}{n}$, wobei n eine natürliche Zahl bezeichnet, die größer als 1 ist, werden Stammbrüche genannt. Zwei Stammbrüche, deren Nenner sich um 1 unterscheiden, wollen wir benachbart nennen. Zum Beispiel sind somit $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{9}$ benachbarte Stammbrüche.

(a) Ermittle alle diejenigen (gebrochenen) Zahlen zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, die sich als Summe zweier benachbarter Stammbrüche schreiben lassen!

(b) Untersuche jede der drei Zahlen $x = \frac{52}{463}$, $y = \frac{31}{273}$, $z = \frac{107}{2862}$ daraufhin, ob sie sich als Summe zweier benachbarter Stammbrüche schreiben läßt!

(c) Max erklärt dem Moritz, wie er die Summe zweier benachbarter Stammbrüche berechnet: „Ich erweitere den ersten Stammbruch mit dem Nenner des zweiten und den zweiten Stammbruch mit dem Nenner des ersten. Die Zähler der beiden so entstandenen Brüche addiere ich; das ergibt den Zähler des Ergebnisses. Als Nenner des Ergebnisses nehme ich den gemeinsamen Nenner der beiden eben durch Erweitern erhaltenen Brüche."
Moritz antwortet: „Wenn man so rechnet, ergibt sich stets ein unkürzbarer Bruch, gleichgültig, welche beiden benachbarten Stammbrüche man addiert hat."
Beweise, daß diese Antwort wahr ist!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

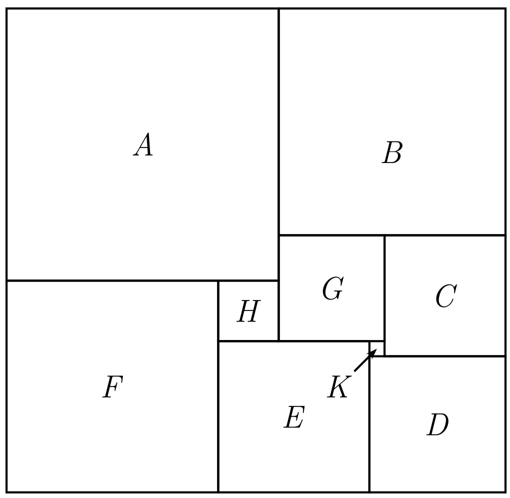
<u>360724</u>

Die Abbildung A 360724 zeigt neun Quadrate $A, B, C, D, E, F, G, H, K$, die so zusammengefügt wurden, daß die Gesamtfigur ein Rechteck bildet.

(a) Die Seitenlänge des Quadrates A betrage 36 cm , des Quadrates B 30 cm , des Quadrates D 18 cm und des Quadrates F 28 cm.
Ermittle aus diesen Angaben die Seitenlängen der übrigen fünf Quadrate!

(b) In einem anderen Rechteck soll eine „ebenso aussehende“ Zerlegung vorliegen.
(Damit ist gemeint: Für die neue Zerlegung haben zwei Quadrate immer in gleicher Weise ein gemeinsames Stück ihres Randes, wie es hier in Abb. A 360724 der Fall war. Zum Beispiel haben hier die Quadrate G und H ein gemeinsames Randstück; dieses ist eine vollständige Seite von H, aber nur ein Teil einer Seite von G; das andere Teil ist zugleich Teil einer Seite von A. In der neuen Zerlegung soll alles dies ebenfalls gelten.)
Für die neue Zerlegung betrage der Flächeninhalt des Quadrates C 64 cm^2 und des Quadrates D 81 cm^2. Ermittle die Flächeninhalte der Quadrate E, G, H und K!

(c) Beweise, daß es kein Rechteck mit „ebenso aussehender“ Zerlegung geben kann, in dem das Quadrat E die Seitenlänge 4,4 cm und das Quadrat G die Seitenlänge 3,5 cm hat!



A 360724