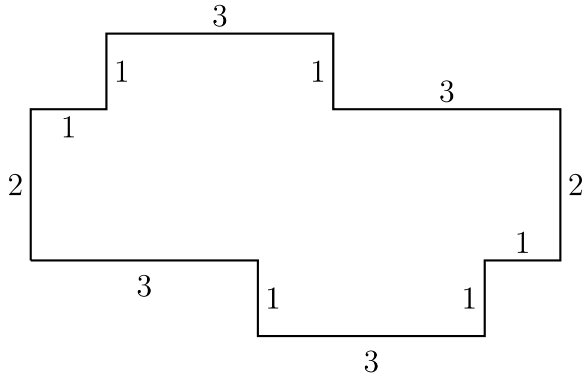
36. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

360621

a) In der Abbildung A 360621 a wird eine Figur gezeigt. Alle Winkel darin sind rechte Winkel, die Längenangaben sind in Zentimetern zu nehmen.



A 360621 a

Zerlege diese Figur vollständig in vier einander deckungsgleiche Teilfiguren! Gib drei Beispiele einer solchen Zerlegung an!
Hinweis: : Es genügt, die drei Beispiele zeichengenau anzufertigen. Eine Begründung wird nicht verlangt.

b) Nun enthält die Figur noch quadratförmige Zahlenfelder (siehe Abbildung A 360621 b):

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

	12	14	13			
5	8	11	3	1	7	17
15	10	9	4	20	19	6
			2	16	8	

A 360621 b

Gib auch für diese Figur eine Zerlegung in vier einander deckungsgleiche Teilfiguren! Dabei sollen die Zahlenfelder nicht zerschnitten werden, und die Zahlen in den vier Teilfiguren sollen einander gleiche Summen ergeben.

c) Kann man anstelle der Zahlen in (b) die Zahlen von 1 bis 20 so eintragen, daß sich dann dieselbe Aufgabe wie in (b) lösen läßt? Wenn ja, gib ein Beispiel; wenn nein, begründe, warum nicht!
Wie lautet die Antwort und die Begründung, wenn in den Zahlen von 1 bis 20 die 18 weggelassen wird und dafür die 8 zweimal vorkommt?

360622

Vier Fußballvereine A, B, C, D tragen ein Turnier aus, bei dem jeder dieser Vereine gegen jeden anderen genau einmal spielt. Die Punktverteilung erfolgt so: Jeder Verein erhält

für jedes	gewonnene	Spiel	3 Punkte,
für jedes	verlorene	Spiel	0 Punkte,
für jedes	unentschiedene	Spiel	1 Punkt.

a) Welche Werte kann die Summe aller derjenigen Punkte annehmen, die in einem solchen Turnier vergeben werden? Nenne alle diese Werte und begründe, daß es alle sind!

b) Bei einem solchen Turnier wurde der folgende Tabellen-Endstand erreicht:

Verein	A	B	C	D
Punkte	9	4	3	1

Gib für jedes einzelne Spiel des Turniers einen Spielausgang (Gewinner- und Verliererverein bzw. unentschiedener Ausgang) so an, daß dieser Endstand zustandekommen konnte!

c) Bei einem anderen solchen Turnier war 14 die Summe aller derjenigen Punkte, die in dem Turnier vergeben wurden. Außerdem ergab sich im Endstand:

- A erhielt mehr Punkte als B,
- B mindestens so viele Punkte wie C,
- C mindestens so viele wie D.

Gib auch hierzu für jedes einzelne Spiel des Turniers einen Spielausgang so an, daß ein derartiger Endstand zustandekommen konnte!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

360623

Frank und Beyhan stellen sich Aufgaben der folgenden Art:

Eine natürliche Zahl wird gegeben; gesucht wird ihre Darstellung als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, wobei die 0 nicht als Summand zugelassen sein soll.

Frank hat als jeweils gegebene Zahl alle natürlichen Zahlen von 2 bis 10 durchprobiert. Er behauptet: „Unter diesen Zahlen gibt es mindestens zwei, bei denen die Aufgabe nicht lösbar ist.“

Beyhan hat als jeweils gegebene Zahl alle natürlichen Zahlen von 10 bis 20 mit genau einer Ausnahme durchprobiert. Er behauptet: „Für alle Zahlen, die ich probiert habe, ist die Aufgabe lösbar.“

a) Zeige, daß Frank recht hat!
b) Zeige, daß es zehn Zahlen unter den elf natürlichen Zahlen von 10 bis 20 gibt, so daß Beyhan recht hat, wenn er gerade diese zehn Zahlen durchprobiert hat!
c) Nachdem Beyhan nun noch die vorher weggelassene Zahl probiert hat, behauptet er: „Für diese Zahl ist die Aufgabe nicht lösbar.“ Hat er auch hiermit recht? Begründe deine Antwort!

360624

a) Für ein Ratespiel wird mitgeteilt: Es werden drei Gewichtsstücke benutzt; jedes wiegt eine ganze Zahl von Gramm, zusammen wiegen sie 6 Gramm. Äußerlich, nur vom Ansehen, sind sie nicht zu unterscheiden.

   Welche Möglichkeiten gibt es hiernach für die Gewichte der einzelnen Gewichtsstücke?
b) Die Spielregeln lauten: Der Rater soll mehrmals vorschreiben, welche zwei der drei Gewichtsstücke auf eine Balkenwaage kommen sollen, welches auf die rechte, welches auf die linkes Seite. Jedesmal wird ihm dann mitgeteilt, ob Gleichgewicht eintrat oder welches Gewichtsstück schwerer als das andere war. Er sieht die Wägungen aber nicht, kann also nicht wissen, ob der Gewichtsunterschied bei einer Wägung etwa größer war als bei einer anderen Wägung.

   Welches ist die kleinste Zahl solcher Wägungen, nach der es überhaupt möglich werden kann, daß infolge der Informationen, die der Rater erhält, die drei Gewichte eindeutig feststehen?
c) Ein Rater schreibt jeweils die nächste Wägung so vor, daß sich die drei Gewichte mit möglichst wenig Wägungen ermitteln lassen.

   Welches ist dann die größte Zahl von Wägungen, die hierbei erforderlich werden können?