35. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

351341

Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, für die folgende Aussage gilt:

Schreibt man die dezimale Zifferndarstellung von n auf und fügt dann noch weitere geeignete Ziffern an, so entsteht die dezimale Zifferndarstellung der Zahl $1\,996 \cdot n$.

351342

Es seien a und b positive reelle Zahlen mit $a < 1$ und $b < 1$. Beweisen Sie, daß unter dieser Voraussetzung stets die beiden folgenden Aussagen (1) und (2) zueinander äquivalent sind!

(1) Es gilt $a + b = 1$.

(2) Für alle diejenigen positiven reellen Zahlen x und y mit $x < 1$ und $y < 1$, für die die Ungleichung $ax + by < 1$ gilt, gilt auch die Ungleichung

$$\frac{1}{1 - ax - by} \leqslant \frac{a}{1 - x} + \frac{b}{1 - y}\,.$$

351343

Es sei $ABCD$ ein beliebiges (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder. Sein Volumen sei V. Betrachtet werden Ebenen, die durch den Schwerpunkt S des Tetraeders $ABCD$ verlaufen und die Kante $\overline{AD}$ in einem Punkt A', die Kante $\overline{BD}$ in einem Punkt B', so wie die Kante $\overline{CD}$ in einem Punkt C' schneiden. Es ist bekannt, daß es unter allen durch solche Ebenen entstehenden Teiltetraedern $A'B'C'D$ eines mit kleinsten Volumen gibt.

Man ermittle dieses kleinste Volumen in Abhängigkeit von V.