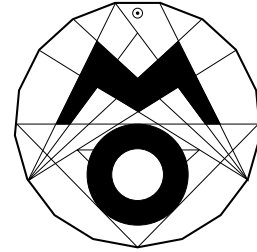


35. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklassen 8
Aufgaben – 1. Tag



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

350841

An einer Schule gibt es drei Arbeitsgruppen *Informatik*, *Mathematik*, *Schach*. Über sie werden folgende Aussagen gemacht:

Die Anzahl derjenigen Schüler, die an je mindestens einer dieser Arbeitsgruppen teilnehmen, beträgt 35.

An der Arbeitsgruppe *Schach* nehmen genau 17 Schüler teil.

Genau 8 Schüler nehmen sowohl an der Arbeitsgruppe *Informatik* als auch an Arbeitsgruppe *Mathematik* teil.

Genau 3 Schüler nehmen an alle drei Arbeitsgruppen teil. Genau 16 Schüler nehmen an jeweils nur einer Arbeitsgruppe teil.

Zeige, daß aus diesen Aussagen eindeutig hervorgeht, wie viele Schüler an der Arbeitsgruppe *Schach*, aber an keiner der beiden anderen Arbeitsgruppen teilnehmen!

350842

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Ferner sei $ACDE$ ein beliebiges Parallelogramm, das (bis auf die gemeinsame Strecke \overline{AC}) ganz außerhalb des Dreiecks ABC liegt, und $BCFG$ sei ein Parallelogramm, das (bis auf die gemeinsame Strecke \overline{BC}) ganz außerhalb des Dreiecks ABC liegt. Weiter sei H der Schnittpunkt der durch D und E gelegenen Geraden mit der durch F und G gelegenen Geraden. Schließlich sei $ABKL$ ein Parallelogramm, in dem die Seite \overline{BK} parallel zu der Strecke \overline{CH} und ebenso lang wie diese Strecke ist.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen folgt:

Die Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $ACDE$ und $BCFG$ ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms $ABLK$.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Hinweis: Die hier zu beweisende Aufgabe ist möglicherweise aus einer Arbeitsgemeinschaft bekannt, z. B. unter der Bezeichnung „Satz von Pappos“. In diesem Fall genügt es natürlich nicht, die Aussage ohne Beweis als bekannten Sachverhalt anzuführen (wie oben im Vorspann erklärt), sondern hier ist ein Beweis anzuführen.

350843

Lancelot, der Drachentöter, wollte die Stadt von einem dreiköpfigen, dreischwänzigen Drachen befreien. Eine gute Fee gab ihm ein Zauberschwert. Sie erklärte ihm auch vier Arten, damit zuzuschlagen: Mit je einem Schlag kann man entweder einen Kopf oder einen Schwanz oder zwei Köpfe oder zwei Schwänze abschlagen. Die Fee erklärte auch die Kräfte des Drachen: Schlägt man einen Kopf ab, so wächst wieder ein Kopf nach. Schlägt man einen Schwanz ab, so wachsen zwei Schwänze nach. Schlägt man zwei Köpfe ab, so wächst nichts nach. Schlägt man zwei Schwänze ab, so wächst ein Kopf nach.

Ermittle die kleinste Zahl von Schwertschlägen, mit der dem Drachen alle drei Köpfe und alle drei Schwänze abgeschlagen werden können; d. h.:

- a) Zeige, daß dieses Ziel mit keiner kleineren Zahl erreichbar ist!
- b) Zeige durch ein Beispiel für die Reihenfolge von Schwertschlägen, daß dieses Ziel mit der angegebenen Zahl von Schwertschlägen erreichbar ist!