35. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

351331

Ein Polynom $p(x)$ lasse bei der Division durch $(x-1)^4$ den Rest $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Welchen Rest läßt $p(x)$ bei der Division durch$(x-1)^2$?

Hinweis: Genau dann sagt man, ein Polynom $p(x)$ lasse bei Division durch ein Polynom $f(x)$ das Polynom $r(x)$ als Rest, wenn $r(x)$ kleineren Grad als $f(x)$ hat oder gleich 0 ist und es ein Polynom $q(x)$ gibt, das die Gleichung $p(x) = q(x)f(x) + r(x)$ erfüllt.

351332

Es sei $ABCD$ ein beliebig gegebenes konvexes Viereck. Ein Punkt P durchlaufe alle Punkte der Seite $\overline{AB}$, ein Punkt Q durchlaufe unabhängig hiervon alle Punkte der Seite $\overline{CD}$.

Ermitteln Sie die Menge der Mittelpunkte aller so entstehenden Strecken $\overline{PQ}$!

351333

Teil A:

In einem Raum stehen n verschlossene Truhen. Über sie ist Folgendes bekannt: Zu jeder Truhe gibt es genau einen Schlüssel; mit ihm kann diese und nur diese Truhe geöffnet werden. In jeder Truhe liegt genau einer dieser Schlüssel; diese Verteilung der Schlüssel auf die Truhen ist zufällig; d. h., alle möglichen derartigen Verteilungen sollen die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. In genau einer Truhe liegt außerdem ein Schatz.

Jemand bricht eine zufällig gewählte Truhe auf. Er hat die Möglichkeit, mit dem darin gefundenen Schlüssel die zugehörige Truhe aufzuschließen, wenn sie noch nicht offen ist; dasselbe gilt für gegebenenfalls in weiteren aufgeschlossenen Truhen gefundenen Schlüssel. Freilich wird er diese Möglichkeit, wenn sie besteht, nur nutzen, solange er noch nicht die Truhe mit dem Schatz geöffnet hat.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Wie groß ist (in Abhängigkeit von n) die Wahrscheinlichkeit dafür, auf diese Weise an den Schatz zu kommen?

Teil B:

Zu jeder nichtnegativen reellen Zahl a werde folgendermaßen eine Zahlenfolge (x_n) definiert:

Es sei $x_0 = a,\ x_{n+1} = \mathrm{frac}(2x_n)\ \ (n = 1, 2, \ldots)$.
Die Zahl a werde genau dann periodikal genannt, wenn es eine natürliche Zahl $m \geqslant 0$ und eine natürliche Zahl $k > 0$ mit $x_m = x_{m+k}$ gibt.

Man beweise, daß die Menge aller derjenigen nichtnegativen reellen Zahlen, die periodikal sind, dieselbe Menge ist wie die Menge aller nichtnegativen rationalen Zahlen.

Hinweis: Ist z eine nichtnegative reelle Zahl, so bezeichnet $[z]$ diejenige ganze Zahl $g = [z]$, für die $g \leqslant z < g + 1$ gilt; und dann wird definiert: $\mathrm{frac}(z) = z - [z]$.