35. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklassen 11–13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

351321

Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) reeller, von Null verschiedener Zahlen x, y, die das nachstehende Gleichungssystem (1) und (2) erfüllen:

$$x + \frac{x}{y} = \frac{8}{3} \qquad (1)$$

$$y - \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \qquad (2)$$

351322

Für eine Tombola sollen Papierstreifen mit den Losnummern bedruckt werden. Zunächst wird vorgeschlagen, nach Wahl einer positiven ganzen Zahl n alle diejenigen Ziffernfolgen, die aus genau n Ziffern bestehen, als Losnummern zu verwenden. Dann aber wird bemerkt, daß sich darunter mehrdeutig lesbare Ziffernfolgen befinden, da die Ziffern 0, 6, 8, 9, wenn sie um 180 Grad gedreht werden, wieder als Ziffern lesbar sind. So lautet z. B. für $n = 4$ die Ziffernfolge 0889 nach dieser Drehung 6880; diese beiden Ziffernfolgen sind also mehrdeutig. Dagegen ist z. B. die Ziffernfolge 8698 eindeutig, da sie nach der Drehung genauso lautet; und die Ziffernfolge 8691 ist eindeutig, da sie die Ziffer 1 enthält, also nur in nicht gedrehtem Zustand als Ziffernfolge lesbar ist.

Ein erster Vorschlag (A) lautet: Man lasse genau alle mehrdeutigen Ziffernfolgen weg.

Ein zweiter Vorschlag (B) lautet: Man verwende alle diejenigen Ziffernfolgen, die aus genau n von 0 verschiedenen Ziffern und - als Erkennungszeichen für die Richtung, in der gelesen werden soll - einer vorangestellten Ziffer 0 bestehen.

Man untersuche für jede positive ganze Zahl n, ob nach dem Vorschlag (A) oder nach dem Vorschlag (B) mehr Losnummern vorliegen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

<u>351323</u>

Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) positiver ganzer Zahlen x, y, welche die Gleichung

$$10x^3 - (2y + 5)x^2 + (y - 4)x + 76 = 0$$

erfüllen.

<u>351324</u>

Man beweise: Für jedes Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt F und jede Gerade g durch den Schwerpunkt von $\triangle ABC$ erfüllen die Flächeninhalte F_1, F_2 der Flächenstücke, in die $\triangle ABC$ durch g zerlegt wird, die Ungleichung $|F_2 - F_1| \leqslant \frac{1}{9}F$.

Hinweis: Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden von $\triangle ABC$.