35. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

350821

Heike hat 1500 Gramm einer 7,2-prozentigen wäßrigen Kochsalzlösung. Durch Kochen dieser Lösung verdampft ein Teil des Wassers, und es verbleiben 1200 Gramm der neuen Lösung.

a) Eine wieviel-prozentige Lösung ist dies?

b) Wieviel Gramm Kochsalz müßte Heike der neuen Lösung beigeben, um daraus eine 20-prozentige Lösung zu gewinnen?

Hinweis: In einer „p-prozentigen wäßrigen Kochsalzlösung“ bestehen je 100 Gramm der Lösung aus p Gramm Kochsalz und $(100 - p)$ Gramm Wasser.

350822

Von einem Viereck $ABCD$ wird vorausgesetzt, daß $|AD| = |DC|$ gilt und daß für die Größen seiner Innenwinkel die folgenden Angaben mit einer geeigneten Winkelgröße α zutreffen:

Winkel	DAB	ABC	BCD	CDA
Größe	α	2α	3α	4α

a) Beweise, daß durch diese Voraussetzungen die einzelnen Größen der vier Innenwinkel eindeutig bestimmt sind! Nenne diese Größen!

Beweise ferner, daß aus den Voraussetzungen die nachstehenden Aussagen b), c) und d) folgen!

b) Die Diagonale halbiert den Winkel DAB.

c) Die Seite $\overline{BC}$ ist kürzer als die Seite $\overline{AD}$.

d) Die Seite $\overline{AB}$ ist doppelt so lang wie die Seite $\overline{AD}$.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

350823

a) In einer Schachtel liegen sechs Kugeln. Sie können voneinander unterschieden werden, da sie durch Beschriften mit den Zahlen von 1 bis 6 numeriert sind. Arnold will mit einem Griff drei dieser Kugeln aus der Schachtel herausnehmen. Gib alle Möglichkeiten dafür an, welche drei Kugeln das sein können!

b) Birgit erklärt:

   (1) Zusätzlich zur Numerierung sind die Kugeln gefärbt, jede mit genau einer der Farben Rot, Grün, Blau; jede dieser drei Farben kommt mindestens einmal vor.

   Ferner macht Birgit folgende Aussagen:

   (2) Wenn man 4 Kugeln aus der Schachtel herausgreift, muß sich mindestens eine rote Kugel unter den herausgegriffenen befinden; gleichgültig, welche 4 Kugeln man herausgegriffen hat.

   (3) Wenn man 5 Kugeln aus der Schachtel herausgreift, muß sich mindestens eine grüne Kugel unter den herausgegriffenen befinden; gleichgültig, welche 5 Kugeln man herausgegriffen hat.

   Zeige, daß durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie viele der sechs Kugeln rot, wie viele grün und wie viele blau sind! Nenne diese drei Anzahlen!

c) Christian macht folgende Aussagen:

   (4) Addiert man die Nummern aller roten und grünen Kugeln, so ergibt sich die Summe 15.

   (5) Addiert man die Nummern aller grünen und blauen Kugeln, so ergibt sich eine Summe, die kleiner als 11 ist.

   Ermittle alle Möglichkeiten, den Kugeln (angegeben durch ihre Nummer) derart die Farben zuzuordnen, daß alle Aussagen von Birgit und Christian zutreffen!

350824

a) Konstruiere ein Viereck $ABCD$, in dem die Seitenlängen $a = |AB| = 10$ cm, $b = |BC| = 8$ cm und $d = |AD| = 5$ cm vorliegen, der Winkel BAD die Größe $\alpha = 70°$ hat und der Winkel ABC die Größe $\beta = 60°$ hat!

Zu diesem Viereck ist nun ein Punkt E gesucht, der so liegen soll, daß das Dreieck ABE denselben Flächeninhalt wie das Viereck $ABCD$ hat.

b) Beschreibe, wie aus dem vorliegenden Viereck $ABCD$ ein Punkt E konstruiert werden kann! Die Beschreibung soll jeden Schritt dieser Konstruktion eindeutig kennzeichnen.

c) Beweise, daß ein Punkt E, wenn er nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die geforderte Bedingung erfüllt, daß ABE und $ABCD$ einander flächeninhaltsgleich sind!

d) Führe die Konstruktion durch!