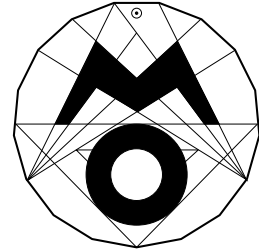


35. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 9 und 10
Aufgaben



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

351011

Uwe berichtet, er habe an einer Straßenkreuzung während einer Grünphase genau folgende Autos die Kreuzung passieren gesehen: Genau zwei VW, genau zwei Audi, genau zwei Opel, genau zwei BMW. Zwischen den beiden VW fuhr genau ein anderes dieser Autos; zwischen den beiden Audi fuhren genau zwei andere; zwischen den beiden Opel fuhren genau drei andere; und zwischen den beiden BMW fuhren genau vier andere der Autos.

Man finde alle Möglichkeiten für die Reihenfolge, in der nach Uwes Bericht die Autos gefahren sein konnten.

351012

Ermittle alle diejenigen Paare (n, k) natürlicher Zahlen, für die $3^{n-1} + 7^{k-1}$ eine Primzahl ist!

351013

Der Verkaufspreis (Bruttopreis) einer Ware setzt sich zusammen aus dem Nettopreis und der Mehrwertsteuer. Vor einiger Zeit hatte in Deutschland die Mehrwertsteuer 14 % des Nettopreises betragen; dann wurde im Zuge der europäischen Anpassung dieser Prozentsatz auf 15 % erhöht. Das bedeutete – bei gleichbleibendem Nettopreis – eine Erhöhung des Verkaufspreises.

Wieviel Prozent des vorigen Verkaufspreises hat diese Erhöhung betragen? Berechne diesen Prozentsatz gerundet auf zwei Dezimalen nach dem Komma!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

351014

Annegret legt aus Hölzchen einheitlicher Länge L ein ebenes Muster, das aus Quadraten der Kantenlänge L zusammengesetzt ist und insgesamt einen quadratförmigen Umfang hat. (Die Breite der Hölzchen sei so klein angenommen, daß sie vernachlässigt werden kann.)

Bernd behauptet, daß sich in diesem Muster insgesamt 30 Quadrate finden lassen, deren Umfang von Hölzchen des Musters gebildet wird. Er zählt dabei zwei Quadrate genau dann als verschieden, wenn in dem Muster wenigstens ein Hölzchen enthalten ist, das im Umfang des einen dieser beiden Quadrate vorkommt, aber nicht im Umfang des anderen.

Für welche Anzahl von Hölzchen trifft Bernds Behauptung zu?

351015

Ist $ABCD$ ein Viereck, so sei eine Gerade genau dann als eine „1 : 2 - Eckgerade“ bezeichnet, wenn sie durch (mindestens) eine Ecke des Vierecks geht und das Viereck in zwei Teilflächen zerlegt, deren Flächeninhalte sich in geeigneter Reihenfolge wie 1 : 2 verhalten.

Untersuche für jedes Trapez $ABCD$ mit den Eigenschaften $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ und $|AB| > 2 \cdot |DC|$, wie viele 1 : 2 - Eckgeraden es insgesamt zu diesem Trapez gibt!

351016

- a) Unter Verwendung aller zehn Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 sollen zehnstellige natürliche Zahlen geschrieben werden, die durch 7 teilbar sind. Man beweise, daß es mindestens 24 solche Zahlen gibt.
- b) Man schreibe ein Computerprogramm, um zu zeigen, daß es sogar mindestens 100 solche Zahlen gibt. Man beweise, daß das angegebene Programm (bei technisch fehlerfreiem Ablauf) diesen Nachweis korrekt erbringt.

Hinweis: Man zeige und verwende – insbesondere zu a) – auch Hilfsaussagen, die über ein bloßes Probieren hinausgehen. Man betrachte etwa Teilgruppen der Zifferndarstellung einer Zahl und beweise z.B. Teilbarkeitsaussagen für Zusammenstellungen solcher Teilgruppen.