# 35. Mathematik-Olympiade
## 1. Stufe (Schulrunde)
## Olympiadeklasse 8
## Aufgaben



Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

### 350811

a) Von den Schülern des Lessing-Gymnasiums gehören genau 40 % einem Sportverein an, und von diesen 40 % sind wiederum genau $\frac{1}{5}$ zugleich Mitglieder des Schulchores. Wieviel Prozent aller Schüler des Lessing-Gymnasiums sind folglich diese Schüler, die sowohl einem Sportverein als auch dem Schulchor angehören?

b) Genau 5 % aller Schüler des Lessing-Gymnasiums verließen am Ende des Schuljahres 1993/94 das Gymnasium. Zu Beginn des Schuljahres 1994/95 kamen 189 Schüler neu an das Gymnasium. Durch diese beiden Änderungen hat sich insgesamt die Anzahl aller Schüler gegenüber der Schülerzahl, die vor dem Ende des Schuljahres 1993/94 dort gewesen war, um 10 % erhöht.

Wie groß ist die Schülerzahl des Gymnasiums nun nach dem Beginn des Schuljahres 1994/95?

### 350812

Von sieben Punkten $A, B, C, D, E, F, G$ sei vorausgesetzt:

(1) Die Punkte $A, B, C, D$ liegen, in dieser Reihenfolge angeordnet, auf einer Geraden $g$.
(2) Die Punkte $A, E, F, G$ liegen, in dieser Reihenfolge angeordnet, auf einer anderen Geraden $g'$.
(3) Der Winkel $GCD$ beträgt $90°$.
(4) Es gilt $|AC| = |CG| = 12\,\text{cm}$.
(5) Die fünf Dreiecke $ABE$, $BEF$, $BCF$, $CFG$, $CDG$ haben alle den gleichen Flächeninhalt.

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

Zeige, daß durch diese Voraussetzungen

a) die Größe des Winkels $DAG$,
b) der Flächeninhalt des Dreiecks $ADG$,
c) die Streckenlänge $|CG|$

eindeutig bestimmt sind, und berechne diese Größen!

Beweise, daß aus den Voraussetzungen $|AE| = |EF|$ folgt!

350813

Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 5 cm! Beschreibe dann eine Konstruktion von drei Punkten $E, F, G$, die folgende Forderungen erfüllen:

(1) Jedes der Dreiecke $ABE, ABF, ABG$ hat denselben Flächeninhalt wie das Quadrat $ABCD$.
(2) Das Dreieck $ABE$ ist spitzwinklig.
(3) Das Dreieck $ABF$ ist rechtwinklig.
(4) Das Dreieck $ABG$ ist stumpfwinklig.

Führe die von dir beschriebene Konstruktion durch! Beweise, daß die Forderungen erfüllt werden, wenn $E, F, G$ nach deiner Beschreibung konstruiert werden!

*Hinweis:* Die Konstruktion von $E, F, G$ soll mit Lineal (nur zum Konstruieren von Geraden) und Zirkel erfolgen, ohne Messen und Rechnen. Die Beschreibung der Konstruktion von $E, F, G$ soll angeben, durch welche Punkte jeweils eine zu konstruierende Gerade gehen soll bzw. um welchen Punkt jeweils ein Kreis konstruiert werden soll und die Länge welcher Strecke als sein Radius genommen werden soll. Beim Beweis sind geometrische und rechnerische Argumente zugelassen.

350814

Alexander, Bianca und Christian unterhalten sich über Teilbarkeitsaussagen.

Alexander meint: „Die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind, ist stets durch 3 teilbar.“ (Er verdeutlicht seinen Gesprächspartnern diese Aussage auch an einem selbstgewählten Beispiel. Wie könnte ein solches Beispiel lauten?)

Bianca meint: „Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, die nicht durch 4 teilbar sind, ist stets durch 2 teilbar.“

Christian verallgemeinert beide Aussagen; er meint: „Für jede natürliche Zahl $m \geqslant 3$ gilt: Wenn $S$ die Summe von $m-1$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist, die sämtlich nicht durch $m$ teilbar sind, und wenn $m$ gerade ist, so ist $S$ durch $\frac{m}{2}$ teilbar. Ist dagegen $m$ ungerade, so ist $S$ durch $m$ teilbar.

Beweise, daß die Aussagen von Alexander, Bianca und Christian alle drei wahr sind!