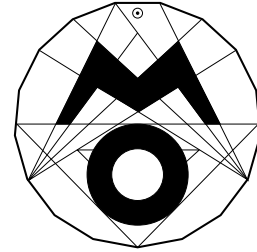


35. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 7
Aufgaben



© 1995 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

350711

Auf Wanderschaft traf Eulenspiegel einen Bauern. Er ging mit ihm ins Wirtshaus. Sie versuchten dort ihr Glück beim Kartenspiel mit dem Wirt, über den sie sich wegen seiner unverschämten Preisforderung geärgert hatten.

Zuerst verlor Eulenspiegel die Hälfte seines Geldes zu gleichen Teilen an den Bauern und den Wirt. Im zweiten Spiel verlor der Bauer die Hälfte des Geldes, das er nun hatte, zu gleichen Teilen an Eulenspiegel und den Wirt. Im dritten Spiel verlor der Wirt die Hälfte des Geldes, das er nun hatte, zu gleichen Teilen an Eulenspiegel und den Bauern. Danach hatte jeder der drei Spieler 8 Taler.

Wer von den drei Spielern hatte nun insgesamt gewonnen, wer hatte verloren, und wie hoch war für jeden der Gewinn bzw. Verlust?

350712

Ermittle alle diejenigen geordneten Tripel (p_1, p_2, p_3) von Primzahlen p_1, p_2, p_3 , welche die Gleichung $p_1(p_3 - p_2) = 195$ erfüllen!

350713

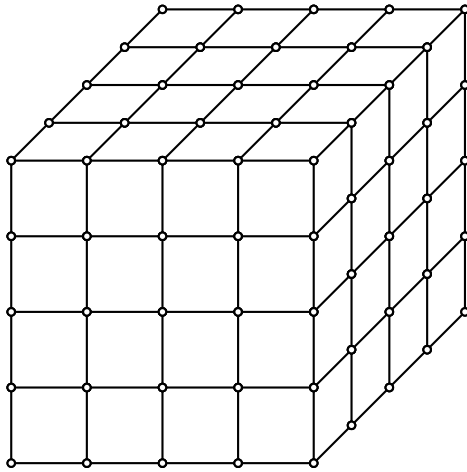
Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AB| = |AC|$. Mittelpunkt der Seite \overline{BC} sei mit D , der Mittelpunkt der Seite \overline{AB} mit E bezeichnet. Der Schnittpunkt von \overline{AD} mit \overline{CE} sei mit S bezeichnet.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck ACS und das Viereck $BDSE$ einander flächeninhaltsgleich sind!

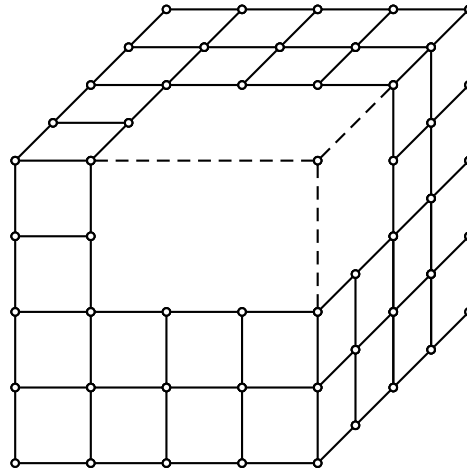
Auf der nächsten Seite geht es weiter!

350714

Die Abbildung A 350714 a zeigt einen Würfel W_1 mit der Kantenlänge 4 cm. Zugleich sind dort sogenannte Gitterpunkte hervorgehoben. Der Abstand je zweier benachbarter Gitterpunkte von links nach rechts, von vorn nach hinten und von unten nach oben beträgt jeweils 1 cm. Auch im Innern des Würfels und auf seinen nicht sichtbaren Flächen denke man sich entsprechend Gitterpunkte eingeführt.



A 350714 a



A 350714 c

- Ermittle die Gesamtzahl der Gitterpunkte, die im Innern und auf der Oberfläche des Würfels W_1 liegen! Nenne auch einzeln die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und die Anzahl der Gitterpunkte auf der Oberfläche!
- Ein anderer Würfel W_2 ist so groß, daß er im Innern und auf seiner Oberfläche insgesamt 512 Gitterpunkte enthält. Ein dritter Würfel W_3 ist so groß, daß schon die in seinem Innern vorhandenen Gitterpunkte genau 512 sind. Beide Würfel haben (ebenso wie W_1) eine solche Lage, daß ihre 8 Ecken Gitterpunkte sind und daß auch ihre Kanten von links nach rechts, von vorn nach hinten bzw. von unten nach oben verlaufen. Welche Kantenlängen haben W_2 und W_3 ?
- In Abbildung A 350714c ist angedeutet, wie man in den Würfel W_1 einen Quader mit den Kantenlängen 2 cm, 2 cm, 3 cm hineinlegen kann. Dieser Quader soll so im Würfel verschoben werden, daß seine Eckpunkte sämtlich auf Gitterpunkte des Würfels zu liegen kommen und daß die Verschiebungsweite größer als Null ist.

Wie viele derartige Verschiebungen sind insgesamt möglich?